

Problema `suffle` - descriere soluție

Autor: Adrian Panaete

Soluție (Adrian Panaete, Radu Vișan)

Cum ar fi rezolvarea pe întregul șir?

Să contorizăm biții de pe fiecare poziție. Deoarece operația ne permite să reaşezăm biții celor N termeni (0 sau 1) la oricare alt termen din șir, putem să construim soluția pornind de la vectorul de frecvență a biților, așezând convenabil fiecare bit disponibil.

Fie w numărul maxim de biți ale unei valori din șir (în enunț, $w \leq 20$).

Să începem cu toate valorile egale cu 0. Vom considera biții de la cel mai semnificativ la cel mai puțin semnificativ și vom respecta urmatorul principiu: la fiecare poziție vom repartiza biții de 1 celor mai mici valori construite până în prezent iar biții de 0 celor mai mari, după care resortăm șirul (complexitate $O(w * n * \log(n))$) sau îl interclasăm (complexitate $O(w * n)$).

Se poate demonstra că această strategie ne va conduce la soluția optimă, folosind un argument foarte simplu pe care îl vom detalia mai târziu.

Pentru a obține un algoritm mai bun ca timp de execuție, observăm că, după fiecare dintre cei w biți considerați, **numărul de elemente distincte din șir crește cu cel mult 1**. Din acest motiv, putem “simula” algoritmul naiv descris mai sus pe o reprezentare “comprimată” a șirului, dată prin perechi <valoare, frecvență>. Astfel, complexitatea algoritmului devine $O(w^2 \log(w))$ sau $O(w^2)$, în funcție de implementare.

În final, vom avea cel mult w perechi <valoare, frecvență>, iar suma o putem calcula ușor.

Pentru a răspunde la o interogare, facem diferența contoarelor din capetele intervalului interogată (ca sume parțiale) și obținem astfel contorul pe subsecvența pentru fiecare dintre cei w biți, după care se aplică algoritmul descris.

Ne mai rămâne să justificăm corectitudinea acestui algoritm.

Evident că, dacă aplicăm operația între două numere la o poziție la care găsim bit identic operația nu modifică nimic, deci singurele mutări semnificative sunt schimbarea unui bit 0 cu un bit 1.

Operația "mută" o valoare (putere de 2) de la un număr la altul. În primul rând, această mutare este benefică atunci când valorile obținute se apropie. Se dovedește asta cu un calcul matematic foarte simplu.

Mutarea aplicată succesiv pe aceleași două numere ne permite să schimbăm secvențe întregi de biți între două numere date.

Folosind această idee facem o observație care justifică complet soluția:

Să considerăm o soluție optimă. Alegem doi termeni din șir. Separăm pentru acești termeni reprezentările binare în sufixe și prefixe de aceeași lungime (a căror sumă este evident w). Se poate demonstra (tot cu un calcul matematic simplu) că la prefixul mai mare este optim să corespundă sufixul mai mic.